О дифференцировании функционалов, содержащих время первого выхода диффузионного процесса из области

Гусев С.А. *, Докучаев Н.Г. †

Аннотация

Одной из проблем при дифференцировании функционалов диффузионных процессов в областях с поглощающими границами является вычисление производных по параметрам для времени первого выхода случайного процесса из области τ. Ранее в работе С.А. Гусева был предложен метод решения этой проблемы, но при этом накладывалось ограничительное и трудно проверяемое условие существования среднеквадратических производных τ по параметрам. В данной работе показано, что при некоторых дополнительных предположениях это условие может быть снято.

Ключевые слова: *диффузионный процесс, время первого выхода, поглощающая граница, производные по параметрам.*

1 Введение

Необходимость дифференцирования по параметрам функционалов случайных процессов возникает в задачах стохастической оптимизации. Решение таких задач осложняется в случаях, когда функционалы содержат время первого выхода τ случайного процесса из области. Известно, например, что время первого выхода для гладких процессов не является непрерывным относительно малых изменений параметров. С другой стороны, для случайных диффузионных процессов имеется некоторая регулярность математических ожиданий, содержащих время первого выхода случайного процесса [1], [2]. Однако эта регулярность не гарантирует существование производных τ. Дифференцирование математических ожиданий функционалов, содержащих τ, в принципе возможно (например, через дифференцирование по параметру соответствующих решений краевых задач для уравнений Колмогорова в случае диффузионных процессов). Но при этом практическое вычисление этих производных является сложной задачей.

В настоящее время имеется не так много работ, посвященных проблеме дифференцирования по параметрам функционалов, содержащих τ. При этом задачи, в которых требуется определение соответствующих производных, встречаются в различных приложениях. Необходимость вычисления производных по параметрам решений параболических уравнений возникает, например, при использовании градиентных методов оптимизации для решения задач оптимального выбора параметров для этих уравнений. Соответственно, дифференцирование функционалов от случайных процессов, содержащих τ, требуется при решении задач стохастической оптимизации

*ИВМиМГ СОРАН пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090.

†Department of Mathematics and Statistics, Curtin University, GPO Box U1987, Perth, Western Australia, 6845.

This is a pre-copy-editing, author-produced PDF of an article "On differentiation of functionals containing the first exit of a diffusion process from a domain"published, following peer review, in *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 59:1 (2014), 159–168, in Russian. (DOI 10.4213/tvp4555). The definitive publisher-authenticated English translated version will be available online at http://www.siam.org/journals/tvp.php (Theory of Probability and Its Applications).

градиентными методами. В частности, определение оценок производных по параметрам функционалов диффузионных процессов встречается в работах по финансовой математике. Например, в [3], [4] оценки производных по параметрам цены опциона определяются на основе стохастического исчисления Маллявэна. В этих работах, рассматриваются функционалы несколько иного типа чем приведенный ниже функционал (2), хотя для опционов барьерного типа задачу можно преобразовать так, что в ней будет фигурировать функционал вида (2).

В [5] было предложено выразить производные от функционалов, содержащих τ, из уравнения, которое получается в результате применения формулы Ито к некоторой функции, обращающейся вместе со своими первыми производными в ноль на границе. При этом накладывалось условие существования среднеквадратических производных τ по параметрам. В реальности, проверка этого условия затруднительна; более того, в настоящее время неизвестны примеры, когда оно выполнено.

В предлагаемой работе показано, что полученная в [5] формула справедлива без этого ограничительного условия, если коэффициенты уравнения являются достаточно гладкими функциями.

2 Постановка задачи

Предположим, что даны связная ограниченная область $G \subset R^d$ с регулярной границей ∂G (см. далее), вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, для которого задана не убывающая последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Пусть задан $W_\cdot$ — d-мерный винеровский процесс прогрессивно измеримый относительно $\mathcal{F}_t$; для $s > t$ разность $W_s - W_t$ независима от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Зададим открытое множество $U \subset R^m$. Пусть $x \in G$ и $t \in [0, T)$. Обозначим $X_s = X_s(\theta)$ — d-мерный случайный процесс, зависящий от векторного параметра $\theta \in U$, который описывается следующим векторным СДУ

$$X_s(\theta) = x + \int_t^s a(v, X_v(\theta), \theta)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v(\theta), \theta)dW_v, \tag{1}$$

с измеримыми функциями $a : [0, \infty) \times R^d \times U \to R^d$ и $\sigma : [0, \infty) \times R^d \times U \to R^{d\times d}$. Относительно коэффициентов СДУ (1) предполагаем

A) Функции a, σ ограниченные и существует константа $\mathcal{K}$ такая, что для всех $\theta \in U$, $v \geq 0$, $x, y \in R^d$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$ выполняется неравенство

$$|a_i(v, x, \theta) - a_i(v, y, \theta)| + |\sigma_{ij}(v, x, \theta) - \sigma_{ij}(v, y, \theta)| \leq \mathcal{K}|x - y|.$$

Этих предположений относительно a, σ достаточно [6], чтобы при любом $\theta \in U$ существовал процесс X_s, $\mathcal{F}_s$ измеримый , такой, что для него при всех $s \geq 0$ с вероятностью 1 выполняется равенство (1).

Символом $E_{t,x}$ будем обозначать математическое ожидание относительно вероятностной меры $P_{t,x}$, соответствующей случайному процессу, исходящему в момент времени t из точки x (определение $P_{t,x}$ см., например, в [7], стр. 381).

В приложениях встречаются математические ожидания вида

$$u(t, x, \theta) = E_{t,x}\big[\varphi(X_T(\theta), \theta)\chi_{\tau>T} + \int_t^{T\wedge\tau} f(v, X_v(\theta), \theta)dv\big], \tag{2}$$

где $\tau = \inf\{v |\ v > t,\ X_v \notin G\}$ – время первого выхода $X_\cdot$ из области, χ_A – индикаторная функция множества A.

Обозначим $Q_T = (0, T) \times G$. Известно, что при некоторых ограничениях на φ и f значение (2) совпадает в точке $(t, x) \in Q_T$ с решением следующей краевой задачи для параболического уравнения

$$
\begin{aligned}
&Lu + f(t,x,\theta) = 0, \quad t \in (0,T), \quad (t,x) \in Q_T, && (3)\\
&u(T,x,\theta) = \varphi(x,\theta), \qquad x \in G, && (4)\\
&u(t,x,\theta) = 0, \qquad x \in \partial G. && (5)
\end{aligned}
$$

Оператор $L = L(\theta)$ в уравнении (3) задан как

$$
L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t,x,\theta)\partial^2_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x,\theta)\partial_{x_i}, \tag{6}
$$

где b_{ij} – элементы матрицы $B \equiv \sigma\sigma^*$.

Приведенный в (2) функционал содержит τ. В данной статье исследуется возможность дифференцирования математических ожиданий вида (2). В связи с этим дополнительно к условиям **А)** вводятся следующие предположения:

Б) матричная функция $B(t,x,\theta) = \{b_{ij}(t,x,\theta)\}$ равномерно невырождена:

$$
B(t,x,\theta) \geq \alpha_0 I
$$

для некоторого $\alpha_0 > 0$;

В) граница гладкая не ниже класса C^2, а также непрерывность и ограниченность в $[0,\infty) \times R^d \times U$ производных

$$
\frac{\partial a}{\partial x},\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2},\ \frac{\partial a}{\partial \theta_i},\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial \theta_i},\ \frac{\partial \sigma}{\partial x},\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2},\ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_i},\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial \theta_i},\ \frac{\partial a}{\partial t},\ \frac{\partial \sigma}{\partial t}\ ;
$$

Г) существуют непрерывные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ при любых $(x,\theta) \in Q \times U$;

Д) функция f непрерывна на $[0,T] \times \overline{Q}_T$ при любом $\theta \in U$ и существуют непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ при любых $(t,x,\theta) \in Q_T \times U$.

Обозначим G_δ подмножество точек G, находящихся на расстоянии большем, чем $\delta > 0$ от ∂G. В [8] даны теоремы существования решений краевых задач для параболических уравнений. При этом тип функционального пространства, к которому принадлежит решение, существенно зависит от исходных данных задачи. Для целей данной статьи подойдет любое решение, которое имеет непрерывную классическую производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точках из любого непустого множества вида $(0, T-\delta) \times G_\delta$. Для решения задачи (3) — (5) это условие выполнено в силу следующих теорем из [8]: глава III, теорема 4.2; глава IV, теорема 5.2, теорема 9.1. При этом входные данные задачи (3) — (5) должны быть такими, чтобы выполнялись приведенные в этих теоремах достаточные условия существования решения.

3 Основной результат: вычисление $\partial u/\partial\theta$

В дальнейшем, для сокращения записи формул, будем считать, что в уравнении (1) присутствует один скалярный параметр $\theta \in U$ ($U \subset R$ – некоторый интервал), отметив при этом, что все результаты легко переносятся на случай векторного параметра.

Если формально продифференцировать по θ функционал (2), то получим

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(t,x) = E_{t,x}\Big[\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T,X_T,\theta)Z_T + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(T,X_T,\theta)\Big)\chi_{\tau>T}$$

$$+ \int\limits_t^{T\wedge\tau}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(v,X_v,\theta)Z_v + \frac{\partial f}{\partial \theta}(v,X_v,\theta)\Big)dv\Big] + \Phi(\theta)\ , \qquad (7)$$

где

$$\Phi(\theta) := \lim_{\Delta\theta\to 0} E_{t,x}\left(\frac{\tau(\theta+\Delta\theta)-\tau(\theta)}{\Delta\theta} f(\tau,X_\tau)\chi_{\tau<T}\right)$$

(если этот предел существует), и где процесс

$$Z_s(\theta) = \int\limits_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial x}Z_v(\theta) + \frac{\partial a}{\partial \theta}\right)dv + \int\limits_t^s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}Z_v(\theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)dW(v) \qquad (8)$$

является среднеквадратической производной $\frac{\partial X_\cdot}{\partial \theta}$ по параметру решения СДУ (1). Известно (см., например, [9]), что сделанные выше предположения обеспечивают существование среднеквадратической производной $Z_s(\theta) = \frac{\partial X_\cdot}{\partial \theta}$, которая может быть получена в результате решения системы СДУ (1), (8).

Для определения первого слагаемого в (7) требуется только знать процесс $(X_\cdot(\theta), Z_\cdot(\theta))$, который является марковским, т.к. система СДУ (1), (8) удовлетворяет условиям существования сильного решения. Если рассматривать полученную в статье формулу для определения производных вида $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ с точки зрения практического применения, то для определения пар вида $(X_\cdot(\theta), Z_\cdot(\theta))$ можно использовать численные методы [5].

При определении второго слагаемого в (7) возникает необходимость учитывать зависимость τ от θ и здесь возникают трудности, о которых говорилось во введении.

Из сказанного следует, что основная проблема в нахождении производных $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ с помощью формулы (7) состоит в определении $\Phi(\theta)$. В данной работе, также как и в [5], мы предлагаем формулу для определения $\Phi(\theta)$, полученную на основе перехода к пределу при $\Delta\theta \to 0$, в которой не используется $\frac{\partial \tau}{\partial \theta}$.

Для доказательства полученной ниже по тексту формулы для $\Phi(\theta)$ мы используем построенную в работе [2] оценку математического ожидания модуля разности значений времени выхода двух диффузионных процессов, описываемых уравнением (1). В [2] при для различных коэффициентов $a^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ и $a^{(2)}$, $\sigma^{(2)}$ в СДУ (1) при условиях ограниченности этих коэффициентов и их производных по x на бесконечном цилиндре $Q_\infty \equiv (0,\infty)\times G$ доказано неравенство ([2], теорема 2.3)

$$E_{t,x}\Big[\frac{1}{\lambda}\Big(\exp\left(\lambda|\tau_1-\tau_2|\right)-1\Big)\Big] \le \max_{k=1,2}\sup_{(t,x)\in Q_\infty}\left|\frac{dv_k}{dx}\right| E_{t,x}\left|X^{(1)}_{\tau_1\wedge\tau_2} - X^{(2)}_{\tau_1\wedge\tau_2}\right|, \qquad (9)$$

где $\lambda > 0$ – константа, зависящая от d, G, $\sup_{Q_\infty} a^{(k)}$ $(k=1,2)$, α_0. В контексте данной статьи коэффициенты $a^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ $(k=1,2)$ есть коэффициенты СДУ (1), взятые при различных значениях параметра $\theta=\theta_k$, т.е. $a^{(k)}(t,x)\equiv a(t,x,\theta_k)$, $\sigma^{(k)}(t,x)\equiv\sigma(t,x,\theta_k)$. В (9) использованы следующие обозначения: $X^{(k)}_\cdot$ – случайный процесс, который получается, если в СДУ (1) подставить вместо a, σ соответственно коэффициенты $a^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ $(k=1,2)$; τ_k – время первого выхода $X^{(k)}_\cdot$ из области G; v_k – решение следующей краевой задачи в Q_∞

$$L^{(k)}v_k + \lambda v_k + 1 = 0, \qquad (10)$$

$$v_k(t,x)\Big|_{x\in\partial G} = 0, \qquad (11)$$

$$ess\sup_{t>0}\|v_k(t,\cdot)\|_{L_2(G)} < \infty, \qquad (12)$$

где $L^{(k)}$ – параболический оператор вида (6), у которого коэффициентами при первых и вторых производных по x являются соответственно элементы вектора $a^{(k)}$ и матрицы $B^{(k)} \equiv \sigma^{(k)}(\sigma^{(k)})^*$. По теореме 2.1 в [2] $\sup_{x,t,\theta_k} |\partial v_k/\partial x| < +\infty$.

Для выражения под знаком математического ожидания в левой части (9) выполняется очевидное неравенство

$$|\tau_1 - \tau_2|^p \le p!\lambda^{-p}\Big(\exp\big(\lambda|\tau_1-\tau_2|\big) - 1\Big) \text{ для } p = 1, 2, \ldots \quad . \tag{13}$$

Неравенства (9), (13) мы используем ниже по тексту, взяв в качестве $X^{(1)}_{\cdot}$, $X^{(2)}_{\cdot}$ процессы $X_{\cdot}(\theta+\Delta\theta)$, $X_{\cdot}(\theta)$ и заменив в (9) $\max\limits_{k=1,2}\sup_{(t,x)\in Q_\infty}\left|\frac{dv_k}{dx}\right|$ на $\sup\limits_{(t,x,\theta)\in Q_\infty\times U}\left|\frac{dv}{dx}\right|$, где v – решение задачи вида (10) – (12) с оператором (6).

Лемма 1 . *Для любого целого $p \ge 1$ имеет место сходимость*

$$E_{t,x}|\tau(\theta+\Delta\theta) - \tau(\theta)|^p \to 0 \textit{ при } \Delta\theta \to 0 \ . \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что решение СДУ (1) непрерывно в среднем квадратическом по θ. Обозначим $\tilde\tau(\theta,\Delta\theta) = \tau(\theta)\wedge\tau(\theta+\Delta\theta)$. Применяя (9) и (13) к $X_{\cdot}(\theta+\Delta\theta)$ и $X_{\cdot}(\theta)$, получим оценку математического ожидания для $|\tau(\theta+\Delta\theta) - \tau(\theta)|^p$

$$E_{t,x}|\tau(\theta+\Delta\theta) - \tau(\theta)|^p \le C(p)E_{t,x}|X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta+\Delta\theta) - X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)| \ , \tag{15}$$

где $C(p) = p!\lambda^{-p}\sup\limits_{(t,x,\theta)\in Q_\infty\times U}\left|\frac{dv}{dx}\right|$.

Случайный процесс $X_{\cdot}(\theta)$ непрерывен по θ в среднеквадратическом смысле, отсюда следует, что $E_{t,x}|X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta+\Delta\theta) - X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)| \to 0$ при $\Delta\theta\to 0$. Лемма доказана.

Лемма 2 *Существует постоянная $K > 0$, такая, что при $\Delta\theta \to 0$*

$$E_{t,x}\Big|\frac{\tau(\theta+\Delta\theta)-\tau(\theta)}{\Delta\theta}\Big| < K \ . \tag{16}$$

Доказательство. Мы знаем, что решение СДУ (1) дифференцируемо в среднем квадратическом по θ. Поделим неравенство (15) при $p = 1$ на $\Delta\theta$

$$E_{t,x}\Big|\frac{\tau(\theta+\Delta\theta)-\tau(\theta)}{\Delta\theta}\Big| \le C(1)E_{t,x}\Big|\frac{\Delta X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta}\Big| \ , \tag{17}$$

где $\Delta X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta) = X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta+\Delta\theta) - X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)$. Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского и среднеквадратическую дифференцируемость $X_{\cdot}$ по θ получаем при $\Delta\theta \to 0$

$$E_{t,x}\Big|\frac{\Delta X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta}\Big| \le \left[E_{t,x}\Big(\frac{\Delta X_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}(\theta)}{\Delta\theta}\Big)^2\right]^{\frac12} \le \sup_{0\le v\le T}\left[E_{t,x}\chi_{v\le\tau\wedge T}Z_v^2(\theta)\right]^{\frac12} , \tag{18}$$

где $Z_{\cdot}$ - среднеквадратическая производная $X_{\cdot}$ по θ. Величина $E_{t,x}Z_v^2(\theta)$ ограничена, т.к. для уравнения (8) выполняются условия Теоремы 4 [9], стр. 48. Лемма доказана.

Для произвольной функции $r(x,\theta)$ такой, что $r \in C^1(R^{d+1} \to R)$, ниже будем использовать обозначение $\frac{d}{d\theta}r(X_{\cdot}(\theta),\theta) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial X_{\cdot}(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial r}{\partial\theta}$, где $\frac{\partial X_{\cdot}(\theta)}{\partial\theta}$ – среднеквадратическая производная.

Нижеследующая теорема содержит основной результат статьи.

Теорема 1 . *Пусть коэффициенты уравнения (1) и функции* φ, f *удовлетворяют условиям* **А) – Д)**. *Тогда имеет место формула (9). При этом предел* $\Phi(\theta)$ *существует и может быть определен с помощью следующей формулы*

$$\Phi(\theta) = -E_{t,x}\Big[\chi_{\tau<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\Big(\int\limits_t^\tau \frac{d}{d\theta}\Big(Lg\Big)_v dv + \int\limits_t^\tau \frac{d}{d\theta}\sum_{l,j}\Big(\frac{\partial g}{\partial x_l}\sigma_{lj}\Big)_v dW_j(v)\Big)\Big], \tag{19}$$

где в качестве g *можно выбрать любую функцию класса* $C^4(R^d \to R)$, *которая обращается вместе со своими первыми производными в ноль на* ∂G, *но при этом значения* Lg *не обращаются в ноль на* ∂G *для всех* $\theta \in U$.

Доказательство. Для $\psi \in C^1\big(R \times R^d \to R\big)$ введем обозначение $R_j^\psi(v, X_v, \theta) = \sum\limits_l \frac{\partial \psi(X_v(\theta))}{\partial x_l}$ $\cdot\sigma_{lj}(v, X_v(\theta), \theta)$.

Так как функция g равна нулю на границе, то в результате применения формулы Ито, получим равенство

$$0 = g(x) + \int\limits_t^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta)dv + \int\limits_t^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)dW_j(v)\ \ . \tag{20}$$

Как и в доказательстве леммы 1 используем обозначение $\tilde\tau(\theta, \Delta\theta) = \tau(\theta)\wedge\tau(\theta+\Delta\theta)$. Применяя (20) для значений параметра θ и $\theta + \Delta\theta$, можем записать равенство

$$\begin{aligned}
0 = \tfrac{1}{\Delta\theta}\Big[&\int\limits_t^{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)} \left(Lg(v, X_v(\theta+\Delta\theta), \theta+\Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)\right) dv \\
+ &\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)} Lg(v, X_v(\theta+\Delta\theta), \theta+\Delta\theta)dv - \int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)} Lg(v, X_v(\theta), \theta)dv \\
+ &\int\limits_t^{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)} \sum_j \big(R_j^g(v, X_v(\theta+\Delta\theta), \theta+\Delta\theta) - R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)\big)\, dW_j(v) \\
+ &\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta+\Delta\theta), \theta+\Delta\theta)dW_j(v) \\
- &\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)} \sum_j R_j^g(v, X_v(\theta), \theta)dW_j(v)\Big]\ \ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Умножим (21) на $\chi_{\tau<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}$, где τ берется при значении параметра θ, и рассмотрим предел при $\Delta\theta \to 0$ математического ожидания правой части полученного равенства.

Покажем, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\theta\to 0} E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\int\limits_t^{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)} \frac{Lg(v, X_v(\theta+\Delta\theta), \theta+\Delta\theta) - Lg(v, X_v(\theta), \theta)}{\Delta\theta}dv\Big] \\
&= E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\int\limits_t^{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta}Lg(v, X_v(\theta), \theta)dv\Big]\ \ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Для этого запишем неравенство, которое следует из того, что случайная величина $\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}$ п.в. ограничена

$$\Big|E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\Big(\int\limits_t^{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}\frac{Lg(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-Lg(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}dv$$

$$-\int\limits_t^{\tau(\theta)}\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)dv\Big)\Big]\Big|\le C\int\limits_t^T\Big|E_{t,x}\Big[\chi_{v<\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}\cdot$$

$$\Big(\frac{Lg(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-Lg(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}-\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)\Big)\Big]\Big|dv$$

$$+C\Big|E_{t,x}\Big[\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)dv\Big]\Big|\ , \tag{23}$$

где $C=\sup\limits_{(v,x,\theta)\in[0,T]\times\partial G\times U}\Big|\frac{f(v,x,\theta)}{(Lg)(v,x,\theta)}\Big|$.

Поскольку производные Lg по x, θ непрерывны и ограничены в $\overline{G}$, то можно показать, что при $\Delta\theta\to 0$

$$\frac{Lg(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-Lg(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}\to\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)$$

по вероятности. Поэтому первое слагаемое в правой части (23) стремится к нулю при $\Delta\theta\to 0$.

Также, из непрерывности и ограниченности в $\overline{G}$ производных Lg следует, что величина $\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)$ ограничена. Поэтому второе слагаемое в правой части (23) стремится к нулю при $\Delta\theta\to 0$ на основании леммы 1

$$\Big|E_{t,x}\Big[\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)dv\Big]\Big|\le C_1E_{t,x}\Big|\tau(\theta)-\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)\Big|$$

$$\le C_1E_{t,x}\Big|\Delta\tau\Big|\to 0 \text{ при } \Delta\theta\to 0\ , \tag{24}$$

где $C_1=\sup\limits_{(v,x,\theta)\in[0,T]\times\partial G\times U}\Big|\frac{d}{d\theta}Lg(v,X_v(\theta),\theta)\Big|,\quad \Delta\tau=\tau(\theta+\Delta\theta)-\tau(\theta)$.

Докажем, что при $\Delta\theta\to 0$

$$E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{\Delta\theta(Lg)_\tau}\left(\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}Lg(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)dv\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}Lg(v,X_v(\theta),\theta)dv\right)\right]-E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T}f(\tau,X_\tau)\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}\right]\to 0. \tag{25}$$

По построению для интегралов в (25) выполняется равенство

$$\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}Lg(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)dv-\int\limits_{\tilde{\tau}(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}Lg(v,X_v(\theta),\theta)dv$$

$$=\int\limits_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}Lg(v,X_v(\theta+\eta\Delta\theta),\theta+\eta\Delta\theta)dv, \tag{26}$$

где $\eta = \begin{cases} 1, \text{ если } \tau(\theta) < \tau(\theta+\Delta\theta), \\ 0, \text{ если } \tau(\theta+\Delta\theta) < \tau(\theta). \end{cases}$

Обозначим $C_2 = \sup\limits_{(v,x,\theta)\in[0,T]\times\partial G\times U} \left|\frac{f(v,x,\theta)}{(Lg)_\tau}\right|$. Применяя формулу Ито к $Lg(v, X_v(\theta+\eta\Delta\theta), \theta+\eta\Delta\theta)$, с учетом (26) запишем неравенство для модуля выражения в (25)

$$\left|E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{\Delta\theta(Lg)_\tau}\int\limits_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}\Big(Lg(v,X_v(\theta+\eta\Delta\theta),\theta+\eta\Delta\theta)-(Lg)_\tau\Big)dv\right]\right|$$
$$\leq C_2E_{t,x}\Big[\chi_{(\tau(\theta)<T)\&(\eta=1)}\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}\Big|Lg(\tau,X_\tau(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-Lg(\tau,X_\tau(\theta),\theta)\Big|\Big]$$
$$+C_2\left|E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{1}{\Delta\theta}\int\limits_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}dv\int\limits_{\tau(\theta)}^{v}L^2g(s,X_s(\theta+\eta\Delta\theta),\theta+\eta\Delta\theta)ds\right]\right|$$
$$+C_2\left|E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{1}{\Delta\theta}\int\limits_{\tau(\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}dv\int\limits_{\tau(\theta)}^{v}\sum_j R_j^{Lg}(s,X_s(\theta+\eta\Delta\theta),\right.\right.$$
$$\left.\left.\theta+\eta\Delta\theta)dW_j(s)\right]\right|\ . \tag{27}$$

Очевидно, вторoе и третье слагаемые в правой части (27) стремятся к нулю при $\Delta\theta\to0$. Рассмотрим $E_{t,x}\left[\chi_{\tau(\theta)<T\&(\eta=1)}\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}|\Delta Lg|\right]$, где $\Delta Lg := Lg(\tau,X_\tau(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-Lg(\tau,X_\tau(\theta),\theta)$. Как было указано выше, $\Delta Lg\to0$ при $\Delta\theta\to0$ по вероятности. Зададим $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$. Пусть $\delta>0$ такое, что $P\{|\Delta Lg|>\varepsilon_1\}<\varepsilon_2$ при $\Delta\theta<\delta$. Тогда при $\Delta\theta<\delta$

$$E_{t,x}\left[\chi_{(\tau(\theta)<T)\&(\eta=1)}\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta}|\Delta Lg|\right]<2KM\varepsilon_2+K\varepsilon_1\ ,$$

где K – постоянная в неравенстве (16), $M=\sup\limits_{[0,T]\times\partial G\times U}Lg$. Таким образом, (25) доказано.

Рассмотрим теперь интегралы по винеровскому процессу в (21). Покажем, что

$$\lim_{\Delta\theta\to0}E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}$$
$$\cdot\int\limits_t^{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}\sum_j\frac{R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}dW_j(v)\Big]$$
$$=E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\int\limits_t^{\tau(\theta)}\sum_j\frac{d}{d\theta}\Big(R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)\Big)dW_j(v)\Big]. \tag{28}$$

Для этого рассмотрим цепочку неравенств

$$\Big|E_{t,x}\Big[\chi_{\tau(\theta)<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\Big(\int\limits_t^T\chi_{v\le\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}$$

$$\cdot\sum_j\Big(\frac{R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}$$

$$-\frac{d}{d\theta}R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)\Big)dW_j(v)\Big)-\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}\sum_j\frac{d}{d\theta}\Big(R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)\Big)dW_j(v)\Big]\Big|$$

$$\le C_2\int\limits_t^T\Big(\sum_j E_{t,x}\Big(\frac{R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}$$

$$-\frac{d}{d\theta}R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)\Big)^2\Big)^{\frac12}dv+C_2E_{t,x}\Big|\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}\sum_j\frac{d}{d\theta}\Big(R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)\Big)dW_j(v)\Big|\ . \tag{29}$$

Функция $R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)$ и ее производные по x, θ ограничены в $\overline{G}$. Поэтому можно показать, что при $\Delta\theta\to0$

$$\frac{R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)-R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)}{\Delta\theta}\to\frac{d}{d\theta}R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)$$

по вероятности. Отсюда следует, что первое слагаемое в правой части (29) стремится к нулю при $\Delta\theta\to0$. Так как функция $\frac{d}{d\theta}R_j^g(\cdot,X_\cdot,\theta)$ ограничена, то очевидно, что второе слагаемое стремится к нулю при $\Delta\theta\to0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{1}{\Delta\theta}E_{t,x}\Big[\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta+\Delta\theta)}\sum_j R_j^g(v,X_v(\theta+\Delta\theta),\theta+\Delta\theta)dW_j(v)$$

$$-\int\limits_{\tilde\tau(\theta,\Delta\theta)}^{\tau(\theta)}\sum_j R_j^g(v,X_v(\theta),\theta)dW_j(v)\Big]=0\ . \tag{30}$$

Доказательство (30) следует из того, что функция R_j^g равна нулю на границах отрезков $[\tilde\tau,\tau(\theta)]$ и $[\tilde\tau,\tau(\theta+\Delta\theta)]$. Применяя формулу Ито к этой функции в подынтегральных выражениях в (30), легко можно убедиться в справедливости (30).

Теорема доказана.

Следствие. Теорема 1 позволяет получить формулу для $\frac{\partial u}{\partial\theta}$, в которой отсутствует производная $\frac{\partial\tau}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}(t,x)=E_{t,x}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_T,\theta)Z_T+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(X_T,\theta)\Big)\chi_{\tau>T}$$

$$+\int\limits_t^{T\wedge\tau}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(v,X_v)Z_v+\frac{\partial f}{\partial\theta}(v,X_v)\Big)dv$$

$$-\chi_{\tau<T}\frac{f(\tau,X_\tau)}{(Lg)_\tau}\Big(\int\limits_t^\tau\frac{d}{d\theta}\Big(Lg\Big)_v dv+\int\limits_t^\tau\frac{d}{d\theta}\Big(\sum_{l,j}\frac{\partial g}{\partial x_l}\sigma_{lj}\Big)_v dW_j(v)\Big)\Big].$$

Список литературы

[1] Докучаев Н. Г. О моментах первого выхода для однородных диффузионных процессов. — Теория вероятностей и ее применения, 1986, т.31, № 3, с. 565-566.

[2] Dokuchaev N. Estimates for distances between first exit times via parabolic equations in unbounded cylinders. — Probab. Theory Relat. Fields, 2004, v. 129, p.290-314.

[3] Fournie E., Lasry J.M., Lebuchoux J., Lions P.L., Touzi N. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. — Finance Stochast. 1999. v. 3, №4, p. 391-412.

[4] Montero M., Kohatsu-Higa A. Malliavin calculus applied to Finance.- Physica A 320, 2003, p. 548-570.

[5] Гусев С.А. Оценка производных по параметрам функционалов диффузионного процесса, движущегося в области с поглощающей границей. — Сиб. журн. вычисл. математики, 2008, т.11, № 4, с. 385-404.

[6] Ito K. On a stochastic integral equation. — Proc. Japan Acad. 1946. v. 22, p. 32-35.

[7] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов.- М.: Наука, 1977.

[8] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[9] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.- Киев: Наукова думка, 1968.